MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
ISSN 2301-9115
Volume 6 No.2 Tahun 2018

MODEL MATEMATIKA SISTEM DINAMIK MANGSA-PEMANGSA DENGAN RESPON FUNGSIONAL AKAR KUADRAT

Fania Rosellia
(Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya)
e-mail: faniarosellia@mhs.unesa.ac.id

Abadi
(Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya)
e-mail: abadi@unesa.ac.id

Abstrak

Sebuah masalah penting dalam ekologi adalah untuk mempelajari interaksi antara mangsa dan pemangsa di suatu ekosistem. Sehingga diperlukan model matematika sistem dinamik untuk memprediksi perilaku populasi mangsa-pemangsa pada populasi mangsa dengan sistem pertahanan kelompok. Paper ini khusus membahas tentang rekonstruksi model mangsa pemangsa dari populasi mangsa yang membentuk sistem pertahanan kelompok. Hal tersebut diperlukan untuk dikaji secara mendalam untuk mempelajari perilaku populasi mangsa pemangsa tersebut.

Kata Kunci: mangsa pemangsa, pertahanan kelompok.

Abstract

An important issue in ecology is to study the interaction between prey and predator in an ecosystem. So we need a mathematical dynamic system model to predict the behavior of prey-prey populations in prey populations with group defense systems. This paper specifically discusses the reconstruction of prey predator models of prey populations that form group defense systems. It is necessary to be studied in deeply to study the behavior of prey population of prey.

Keywords: prey predator, group defense.

PENDAHULUAN

Ada banyak spesies hewan di alam di mana satu spesies memakan spesies lain. Spesies pertama adalah pemangsa dan spesies kedua adalah mangsa (Doust & Gholizade, 2014). Di ekosistem alam banyak ditemui mangsa yang berkumpul untuk mencari sumber makanan, sehingga secara tidak sengaja mangsa yang berkumpul tersebut membentuk suatu pertahanan yang disebut pertahanan kelompok (*group defense*). Ketika pemangsa mencari mangsa, pemangsa hanya dapat berinteraksi dengan anggota terluar dari kelompok mangsa, yang dilambangkan dengan akar kuadrat dari populasi mangsa. Model ini sesuai dengan herbivora di savana yang luas dan pemangsa yang besar, seperti interaksi antara singa sebagai pemangsa dengan sekelompok zebra sebagai mangsanya (Ajraldi, et al., 2011).

Respon fungsional yang digunakan adalah Holling tipe II karena menetapkan batas atas konsumsi mangsa oleh pemangsa, yaitu ketika pemangsa mulai kenyang karena mengkonsumsi mangsa secara berlebihan (Dawes and Souza, 2013). Sehingga dalam hal ini, respon fungsional Holling tipe II lebih sesuai untuk memodelkan interaksi antara pemangsa dan mangsanya.

Berdasarkan latar belakang di atas maka penulis tertarik untuk mengkaji model dinamika antara pemangsa dan mangsa yang berkelompok menggunakan respon fungsional akar kuadrat. Tujuan dari penelitian ini untuk merekonstruksi model matematika mangsa-pemangsa dengan respon fungsional akar kuadrat dengan mengasumsikan tidak ada pengaruh faktor eksternal lainnya.

KAJIAN TEORI

Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial biasa yaitu persamaan yang memuat satu atau lebih turunan fungsi yang tidak diketahui yang bergantung pada satu variabel bebas, yang biasa disebut $y(x)$ (atau $y(t)$ jika variabel bebasnya adalah waktu t). Persamaan tersebut juga bisa mengandung y itu sendiri, fungsi x yang diketahui, dan konstanta.

Sedangkan persamaan diferensial parsial melibatkan turunan parsial fungsi yang tidak diketahui dari dua variabel atau lebih. Contoh dari persamaan diferensial parsial dengan fungsi u yang tidak diketahui dari dua variabel x dan y adalah

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Sistem persamaan diferensial yaitu suatu sistem yang mengandung n persamaan diferensial dengan n fungsi yang tidak diketahui, n bilangan bulat positif lebih besar atau sama dengan dua, secara umum berbentuk:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \qquad (1)$$

Dengan $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n$ merupakan fungsi t, $\boldsymbol{x}$ merupakan variabel terikat pada suatu selang waktu t (Kreyszig, 2006).

Model Mangsa-Pemangsa (*Lotka-Volterra*)

Terdapat sepasang spesies yaitu pemangsa (*predator*) dan mangsa (*prey*) dengan populasi, populasi pemangsa dilambangkan dengan y dan populasi mangsa dilambangkan dengan x. Diasumsikan bahwa pemangsa tidak mengkonsumsi makanan lain selain mangsa, dan populasi mangsa tumbuh dengan laju yang sesuai dengan model populasi sederhana ketika tidak ada pemangsa, yaitu ketika $y = 0$, $x' = \alpha x$ dengan α adalah laju pertumbuhan mangsa, $\alpha > 0$ sehingga $x(t) = x_0 e^{\alpha t}$. Dengan adanya pemangsa, diasumsikan bahwa populasi mangsa berkurang dengan laju yang sebanding dengan pertemuan antara mangsa dengan pemangsa, dimodelkan dengan φxy dengan φ adalah laju pemangsaan ketika mangsa bertemu dengan pemangsa, $\varphi > 0$. Sehingga persamaan diferensial untuk populasi mangsa adalah $x' = \alpha x - \varphi xy$.

Untuk populasi pemangsa, dibuat kurang lebih berlawanan dengan asumsi pada populasi mangsa. Dengan tidak adanya mangsa, populasi pemangsa menurun sesuai dengan laju populasi pada model populasi sederhana, akibatnya spesies pemangsa menjadi langka, yaitu ketika $x = 0$, $y' = -\omega y$ dengan ω adalah laju kematian alami pemangsa, $\omega > 0$ sehingga $y(t) = y_0 e^{-\omega t}$. Ketika ada mangsa di sekitar pemangsa, diasumsikan bahwa populasi pemangsa meningkat sesuai dengan pertemuan antara mangsa dengan pemangsa, atau γxy dengan γ adalah laju konversi biomassa dari mangsa ke pemangsa, $\gamma > 0$. Sehingga sistem mangsa pemangsa yang juga disebut sistem Lotka-Volterra adalah

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x - \varphi xy \\ y' &= -\omega y + \gamma xy \end{aligned} \qquad (2)$$

Dengan parameter-parameter positif $\alpha, \varphi, \omega, \gamma$ dan $x, y \geq 0$ karena berhubungan dengan populasi (Hirsch, et al., 2004).

Respon Fungsional

Respon fungsional adalah jumlah mangsa yang berhasil dikonsumsi per pemangsa sebagai fungsi kepadatan mangsa (Solomon, 1949). Respon fungsional diperkenalkan untuk menggambarkan perubahan tingkat konsumsi mangsa oleh pemangsa saat kepadatan mangsa bervariasi (Dawes and Souza, 2013).

Holling memperkenalkan tiga kategori respon fungsional yang disebut Holling tipe I, II dan III. Holling tipe I ditandai dengan hubungan linier antara laju konsumsi dengan kepadatan mangsa. Garis putus-putus pada Gambar 2.6 menunjukkan laju konsumsi maksimum yaitu ketika pemangsa mulai jenuh. Persamaan Holling tipe I yaitu (Denny, 2014):

$$\varphi(x) = \beta x \qquad (3)$$

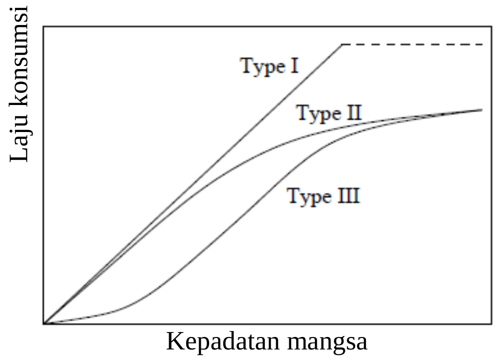
Di mana φ menunjukkan laju konsumsi dan x menunjukkan kepadatan mangsa, β adalah parameter efisiensi pencarian mangsa oleh pemangsa. Holling tipe II menggambarkan kepadatan mangsa meningkat sedangkan kepadatan pemangsa tetap konstan. Pada kepadatan mangsa yang sangat tinggi, pemangsa membutuhkan waktu yang sangat sedikit untuk menemukan mangsa dan menghabiskan hampir seluruh waktunya untuk mengkonsumsi mangsa. Pemangsa hanya membutuhkan waktu yang sangat sedikit untuk mencari mangsa. Pemangsa kemudian kenyang ketika laju konsumsi mangsa mencapai tingkat tertinggi. Sehingga semakin tinggi kepadatan mangsa, semakin kecil mangsa yang dikonsumsi oleh pemangsa. Persamaan Holling tipe II yaitu:

$$\varphi(x) = \frac{\beta x}{1 + t_h \beta x} \qquad (4)$$

dengan t_h adalah rata-rata waktu penanganan mangsa oleh pemangsa.

Holling tipe III menyerupai Holling tipe II yaitu terjadi kejenuhan pada kepadatan mangsa yang tinggi. Namun ketika kepadatan mangsa rendah, pemangsa membutuhkan waktu belajar. Karena pemangsa jarang menemukan mangsa, pemangsa belum mempunyai pengalaman yang cukup untuk menangkap mangsa, sehingga pemangsa membutuhkan waktu belajar (*learning time*) untuk menangkap mangsanya. Penyebab lain rendahnya laju konsumsi saat kepadatan mangsa rendah yaitu pemangsa mencari alternatif makanan lain selain spesies mangsa tersebut. Persamaan Holling tipe III adalah (Denny, 2014):

$$\varphi(x) = \frac{\beta x^2}{1+t_h\beta x^2} \quad (5)$$



Gambar 1. Tiga tipe respon fungsional Holling tipe I, II dan III (Indiana.edu, 2001)

Dalam penelitian ini digunakan respon fungsional Holling tipe II yang menetapkan batas atas konsumsi mangsa oleh pemangsa, yaitu ketika pemangsa mulai kenyang karena mengkonsumsi mangsa secara berlebihan (Dawes and Souza, 2013). Di mana hal tersebut sesuai untuk memodelkan laju konsumsi mangsa oleh pemangsa yang ada di alam.

Model Populasi Logistik

Asumsi yang mengarah pada persamaan diferensial bahwa laju pertumbuhan populasi $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ sebanding dengan ukuran populasi. Namun, hal ini tidak sesuai dengan kenyataan karena asumsi ini tidak memperhatikan faktor-faktor yang mempengaruhi pertumbuhan populasi. Untuk mempertimbangkan batasan ini, dibuat asumsi yang lebih lanjut tentang model populasi seperti:

1. Jika populasi kecil, yaitu ketika $\frac{x}{N}$ mendekati 0, laju pertumbuhannya hampir berbanding lurus dengan ukuran populasi.
2. Namun jika populasi tumbuh terlalu besar, yaitu ketika $\frac{x}{N} > 1$, maka laju pertumbuhan menjadi negatif.

Salah satu persamaan diferensial yang memenuhi asumsi ini adalah model pertumbuhan populasi logistik, yaitu

$$x' = \alpha x\left(1 - \frac{x}{N}\right) \quad (6)$$

α dan N adalah parameter-parameter positif di mana α memberikan laju pertumbuhan populasi ketika x kecil, sedangkan N adalah daya dukung (*carrying capacity*). x_0 adalah populasi awal. Perhatikan jika x kecil, menjadi seperti persamaan diferensial dasar untuk model sederhana dari pertumbuhan populasi yaitu $x' = \alpha x$ (karena kondisi $1 - \left(\frac{x}{N}\right) \approx 1$), namun jika $x > N$, maka $x' < 0$. Sehingga persamaan ini memenuhi asumsi-asumsi di atas (Hirsch, et al., 2004).

Model Mangsa-Pemangsa dengan Pertahanan Kelompok

Group defense (pertahanan kelompok) adalah fenomena di mana predasi berkurang atau bahkan dihilangkan karena kemampuan mangsa untuk mempertahankan atau menyamarkan diri (Hallam et al, 1988). Selain itu, pertahanan kelompok adalah suatu model sosial di mana individu-individu dari satu populasi mangsa berkumpul bersama membentuk kelompok yang bertujuan untuk mencari makanan dan membentuk pertahanan kelompok. Sehingga pemangsa berinteraksi dengan mangsa di sepanjang anggota terluar dari kelompok mangsa. Jika populasi mangsa semakin banyak, maka semakin kecil keberhasilan pemangsa untuk mendapatkan mangsanya (Ajraldi, et al., 2011).

Dalam perilaku kelompok mangsa, jika x menunjukkan kepadatan dari populasi mangsa, yaitu jumlah individu setiap unit permukaan, dengan kelompok yang menempati area A, maka individu yang berada di posisi terluar dalam kelompok itu sebanding dengan garis keliling yang panjangnya tergantung pada $\sqrt{A}$, dengan asumsi bahwa kelompok mangsa berbentuk persegi. Oleh karena itu, jumlah tersebut sebanding dengan akar kuadrat kepadatan, yaitu pada $\sqrt{x}$, dengan konstanta tergantung pada bentuk dari kelompok (Ajraldi, et al., 2011).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Rekonstruksi Model Matematika Mangsa-Pemangsa dengan Respon Fungsional Akar Kuadrat

Berdasarkan persamaan (7) model matematika untuk sistem mangsa-pemangsa sebagai berikut:

$$x' = \alpha x - \varphi xy$$
$$y' = -\omega y + \gamma xy$$

Laju pemangsaan yang digunakan dalam model ini adalah respon fungsional Holling tipe II, sehingga model populasi mangsa-pemangsa menjadi:

$$x' = \alpha x - \frac{\beta x}{1+t_h\beta x} y$$
$$y' = -\omega y + \frac{\mu\beta x}{1+t_h\beta x} y$$

Populasi mangsa (x) pada laju pemangsaan digantikan oleh akar kuadrat populasi mangsa $(\sqrt{x})$ karena mangsa membentuk kelompok. Sehingga model populasi mangsa-pemangsa diperoleh sebagai berikut:

$$x' = \alpha x - \frac{\beta\sqrt{x}}{1+t_h\beta\sqrt{x}} y$$
$$y' = -\omega y + \frac{\mu\beta\sqrt{x}}{1+t_h\beta\sqrt{x}} y$$

Pertumbuhan populasi dari mangsa menggunakan model logistik, sehingga didapatkan:

$x' = \alpha x\left(1 - \frac{x}{N}\right) - \frac{\beta\sqrt{x}}{1+t_h\beta\sqrt{x}}y$

Sehingga diperoleh model matematika sistem dinamik mangsa-pemangsa dengan respon fungsional akar kuadrat sebagai berikut:

$$x' = \alpha x\left(1 - \frac{x}{N}\right) - \frac{\beta\sqrt{x}}{1+t_h\beta\sqrt{x}}y$$
$$y' = -\omega y + \frac{\mu\beta\sqrt{x}}{1+t_h\beta\sqrt{x}}y \qquad (7)$$

di mana:

$x =$ populasi mangsa
$y =$ populasi pemangsa
$\sqrt{x} =$ perilaku kelompok mangsa
$\alpha =$ laju pertumbuhan mangsa
$N =$ daya dukung (*carrying capacity*)
$\omega =$ laju kematian alami pemangsa
$\beta =$ parameter efisiensi pencarian mangsa oleh pemangsa
$\mu =$ faktor yang mempengaruhi laju konversi biomassa dari mangsa ke pemangsa
$t_h =$ rata-rata waktu penanganan mangsa oleh pemangsa

Model tersebut dapat dianalisis dengan menentukan titik kesetimbangan, melakukan linierisasi sistem, kemudian menganalisis titik kesetimbangan menggunakan nilai eigen dan mempelajari perilaku mangsa pemangsa dengan simulasi numerik.

SIMPULAN

Model matematika sistem dinamik mangsa-pemangsa dengan respon fungsional akar kuadrat seperti persamaan (7) dengan populasi mangsa $x(t)$ dan populasi pemangsa $y(t)$.

DAFTAR PUSTAKA

Ajraldi, V., M. Pittavino and E. Venturino. 2011.*Modeling herd behavior in population systems*, Nonlinier Analysis: Real World Applications, 12(4), pp. 2319–2338, doi: 10.1016/j.nonrwa.2011.02.002.

Bera, S. P., Maiti, A. and Samanta, G. P. 2015.*Modelling herd behavior of prey: Analysis of a prey-predator model*, World Journal of Modelling and Simulation, 11(1), pp. 3–14.

Braza, P. A. 2012. *Predator – prey dynamics with square root functional responses*,Nonlinier Analysis: Real World Applications. Elsevier Ltd, 13(4), pp. 1837–1843. doi: 10.1016/j.nonrwa.2011.12.014.

Dawes, J. H., and Souza, M. 2013. *A derivation of Holling's Type I, II and III Functional Responses in Predator-Prey System*, Journal of Theoretical Biology, pp. 1-26.

Denny, Mark. 2014. *Buzz Holling and the Functional Response*. Bulletin of the Ecological Society of America, 95(3), pp. 200-203.

Doust, M. H. R. and Gholizade, S. 2014.*An Analysis of the Modified Lotka-Volterra Predator-Prey Model Main Results*, 25(2), pp. 1–5.

Hallam, T. G., L. J. Gross and S. A. Levin. 1988. *Proceedings of The Autumn Course Research Seminars Mathematical Ecology*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd

Hirsch, Morris W., Stephen Smale and Robert L. Devaney. 2004. *Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos Second Edition.* USA: Elsevier.

Kreyzig, E. 2006. *Advanced Engineering Mathematics.* Columbus: Ohio State University.

Solomon, M. E. 1949. *The Natural Control of Animal Populations*, Journal of Animal Ecology, 18:1–35.